2M

УДК 517.988

А.С. Миненко
Государственный университет информатики и искусственного интеллекта,
г. Донецк, Украина
minenko@iai.donetsk.ua

Исследование стационарной конвективной математической модели кристаллизации вещества

Исследуется стационарная задача Стефана с учётом конвективного движения в жидкой фазе на плоскости. Получено уравнение свободной границы в зависимости от интенсивности вихря. Строится приближенное решение задачи.

Постановка задачи

Математическое моделирование теплофизических процессов в спецметаллургии оперирует такими усредненными величинами, как понятие сплошной среды, её плотность, теплоемкость, температуро- и теплопроводность, вязкость и др., и, опираясь на законы переноса массы, импульса и энергии, составляют основные дифференциальные уравнения для определения других усредненных характеристик – векторного поля скоростей, температурного поля и др. Все теплофизические параметры среды в той или иной степени зависят от температуры, а законы, управляющие этими зависимостями, носят экспериментально-эмпирический характер и до настоящего времени весьма неполны, особенно в области высоких температур, поэтому поневоле приходится рассматривать линейное приближение, применимое в случае малых перепадов температуры, когда зависимостью упомянутых параметров от термодинамического состояния можно пренебречь. Адекватность математической модели физическому явлению возрастает вместе с уточнением упомянутых зависимостей, вследствие чего еще большее значение приобретают соответствующие эксперименты общепознавательного характера. Линеаризованная теория задач массо- и теплопереноса оперирует также с известным количеством безразмерных параметров изучаемого явления, таких, как числа Рейнольдса, Пекле, Нуссельта, Прандтля и др., и значение этих параметров для возможно большего диапазона материалов и режимов тоже приобретает повышенное значение.

Теплофизические процессы в кристаллизаторе, сопровождающиеся фазовыми переходами вещества, описываются математической моделью, в которой температура каждой из фаз удовлетворяет уравнению переноса тепла со своими теплофизическими коэффициентами. На границе раздела фаз обе температуры постоянны и равны температуре фазового перехода (для химической однородной среды), а на заданных частях границы, – стенках кристаллизатора, поддоне, – поддерживается определенный режим (теплоотвод, теплоизоляция и др.). Поверхность раздела фаз (фронт кристаллизации) является неизвестной, или «свободной» границей, и для ее определения дополнительно задается «условие Стефана», означающее, что тепловой поток через фронт

кристаллизации в сторону твердой фазы равен тепловому потоку со стороны жидкой фазы плюс скрытая теплота фазового перехода. Жидкая фаза рассматриваемого процесса заслуживает специального исследования из-за априорной возможности существования поля скоростей, вызывающего интенсивную теплопередачу путем конвекции. Усиленная циркуляция в расплавленной шлаковой ванночке была обнаружена в исследованиях академика Б.Е. Патона и его сотрудников [1].

Основной **целью настоящей статьи** является изучение гидродинамических явлений в жидкой фазе, поскольку здесь экспериментальные исследования, насколько известно, отсутствуют.

Изучается стационарный случай в полосе $D=\{-1<x<1\ \ H<y<0\}$. Обозначим через γ кривую, отделяющую жидкую фазу D_γ^+ от твердой D_γ^-, при этом концы γ лежат на вертикалях $x=\pm 1$. Обе области D_γ^- и D_γ^+ предполагаются односвязными и симметричными относительно оси y. Пусть $\psi(x,y)$ – функция тока, удовлетворяющая условиям: $\Delta\psi=\mu,\ (x,y)\in D_\gamma^+,\ \mu=const>0,\ \psi=0,(x,y)\in\partial D_\gamma^+$. Здесь μ считается достаточно малым численным параметром. Требуется определить, кроме функции тока $\psi(x,y)$, тройку $(u^\pm(x,y),\gamma)$ по следующим условиям:

$$\lambda_+\Delta u^+ - \psi_y u_x^+ + \psi_x u_y^+ = 0,(x,y)\in D_\gamma^+, \lambda_+ = const>0;$$

$$u^+(x,0)=\upsilon, -1\le x\le 1, \upsilon=const>1;$$

$$u_x^\pm \pm \omega_0^+ u^\pm = 0,\ x=\pm 1,(x,y)\in\partial D_\gamma^+; \tag{1}$$

$$\Delta u^- = 0,(x,y)\in D_\gamma^-;\ u^-(x,H)=0,\ -1\le x\le 1,\ u^-(x,y)=u^+(x,y)=1,$$

$$\left|\nabla u^-\right|^2-\kappa^2\left|\nabla u^+\right|^2=0,(x,y)\in\gamma,$$

здесь $\kappa=const,\ 0<\kappa\le 1;\ \omega_0^\pm$ – числа Нусельта.

Приближенное решение задачи

Предложен метод изучения нелинейной задачи (1), состоящий в разложении решения в ряд по степеням малого параметра μ [2]:

$$\psi(x,y;\mu)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\mu^\kappa\psi_\kappa(x,y),\ u^+(x,y;\mu)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\mu^\kappa u_\kappa^+(x,y);$$

$$y(x,\mu)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\mu^\kappa y_\kappa(x),\gamma: y=y(x,\mu),\ -1\le x\le 1.$$

Нулевое приближение $u_0(x,y)$ ищем как минимум функционала

$$I(u^+,u^-,\gamma_0)=\iint\limits_{D_{\gamma 0}^-}\left[u_x^{-2}+u_y^{-2}\right]dxdy+\kappa^2\iint\limits_{D_{\gamma 0}^+}\left[u_x^{+2}+u_y^{+2}\right]dxdy+$$
$$+\kappa^2\omega_0^+\int\limits_{\Gamma_\gamma^+}\left[u^{+2}-1\right]dy+\omega_0^-\int\limits_{\Gamma_\gamma^-}\left[u^{-2}-1\right]dy, \tag{2}$$

на соответствующем множестве допустимых функций, здесь $\Gamma_\gamma^+ = \partial D_\gamma^+ \cap \{x = \pm 1\}$, $\Gamma_\gamma^- = \partial D_\gamma^- \cap \{x = \pm 1\}$. Функционал (2) в классе функций $u_y^\pm > 0$ в $D_\gamma^\pm$ представим следующим образом:

$$I_1(y_1, y_2) = \iint_{\Delta_1} \frac{1+y_{1x}^2}{y_{1u}} dxdu + \kappa^2 \iint_{\Delta_2} \frac{1+y_{2x}^2}{y_{2u}} dxdu + \omega_0^+ \kappa^2 \int_1^\upsilon (u^2-1)\left[y_{2u}(1,u) + y_{2u}(-1,u)\right]du +$$
$$+\omega_0^- \int_0^1 (u^2-1)\left[y_{1u}(1,u) + y_{1u}(-1,u)\right]du,$$

где $\Delta_1 = (-1 < x < 1,\ 0 < u < 1)$, $\Delta_2 = (-1 < x < 1,\ 1 < u < \upsilon)$, $y_1(x,u)$ и $y_2(x,u)$ – решения уравнений $u_1(x,y) - u_1 = 0$, $u_2(x,y) - u_2 = 0$.

Будем минимизировать функционал $I_1(y_1, y_2)$ при помощи сумм

$$y_{1n}(x,u) = \sum_{j=0}^{L} \sum_{\kappa=1}^{T_j} a_{\kappa j} x^{2j} u^\kappa + H,\ (x,u) \in \overline{\Delta}_1;\ y_{2n}(x,u) = \frac{\upsilon - u}{\upsilon - 1} \sum_{j=0}^{L} \sum_{\kappa=0}^{\Theta_j} b_{\kappa j} x^{2j} u^\kappa,\ (x,u) \in \overline{\Delta}_2,$$

применяя при этом метод Ритца [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I_2(a_{\kappa j}, b_{\kappa j})}{\partial a_{pq}} + \lambda_q = 0,\ p = 1,2...,T_q; q = 0,1,...,L, \\ \dfrac{\partial I_2(a_{\kappa j}, b_{\kappa j})}{\partial b_{st}} - \lambda_t = 0,\ s = 0,1...,\Theta_t; t = 0,1,...L, \\ \sum\limits_{\kappa=1}^{T_0} a_{\kappa 0} - \sum\limits_{\kappa=0}^{\Theta_0} b_{\kappa 0} + H = 0,\ \sum\limits_{\kappa=1}^{T_j} a_{\kappa j} - \sum\limits_{\kappa=0}^{\Theta_j} b_{\kappa j} = 0,\ j = 1,2,...L, \\ I_2(a_{\kappa j}, b_{\kappa j}) = I_1\left(\sum\limits_{j=0}^{L}\sum\limits_{\kappa=1}^{T_j} a_{\kappa j} x^{2j} u^\kappa + H;\ \dfrac{\upsilon - u}{\upsilon - 1}\sum\limits_{j=0}^{L}\sum\limits_{\kappa=0}^{\Theta_j} b_{\kappa j} x^{2j} u^\kappa\right). \end{cases} \quad (3)$$

Лемма. Пусть система Ритца (3) имеет решение при некоторых значениях параметров $\omega_0^+ = \tilde{\omega}_0^+$, $\omega_0^- = \tilde{\omega}_0^-$, $\kappa = \tilde{\kappa}$. Тогда решения этой системы $a_{\kappa j}(\omega^+, \omega_0^-, \kappa)$, $b_{\kappa j}(\omega_0^+, \omega_0^-, \kappa)$ непрерывно зависят от параметров $\omega_0^+, \omega_0^-, \kappa$ в некоторой окрестности точки $(\tilde{\omega}_0^+, \tilde{\omega}_0^-, \tilde{\kappa})$.

Проблема сходимости приближенных решений исследована в [3], [4].

Теорема. Пусть μ достаточно малая величина. Тогда справедлива формула:

$$\gamma: \quad y(x,\mu) = y_0(x) - \mu \frac{u_1(x,y)}{u_{0y}(x,y)} + O(\mu),\ \ (x,y) \in \gamma_0, \quad (4)$$

где $y_0(x)$ – решение уравнения $u_0(x,y) - 1 = 0$ в классе функций $u_{0y}(x,y) > 0$ в D; $u_1(x,y)$ – решение краевой задачи:

$$\Delta u = f(x,y), (x,y) \in D; u(x,0) = 0, u(x,H) = 0, 0 \le x \le 1;$$

$$u_x(0,y) = 0, H \le y \le 0; u_x \pm \omega_0^\pm u = 0; x = 1, (x,y) \in \partial D_\gamma^\pm \setminus \gamma;$$

$$f(x,y) = \psi_{1y} u_{0x} - \psi_{1x} u_{0y} \text{ при } (x,y) \in D_{\gamma_0}^{\ +} \text{ и } f(x,y) = 0 \text{ при } (x,y) \in D_{\gamma_0}^{\ -}.$$

Приближенный анализ влияния конвекции на фронт кристаллизации

Численный анализ осуществлялся на основании формулы (4). В качестве функции $u_0(x,y)$ берется решение проблемы минимума функционала (2), которое может быть построено методом Фурье при $k=1, \omega_0^+=\omega_0^-=\omega_0$. Функции $\psi_1(x,y)$ и $u_1(x,y)$ находятся из условий минимума функционалов

$$\mathrm{I}_1(\psi)=\iint\limits_D(\psi_x^2+\psi_y^2+2\psi)dxdy,\ \mathrm{I}_2(u)=\iint\limits_D(u_x^2+u_y^2+2fu)dxdy+\omega_0\int\limits_H^0 u^2(1,y)dy,$$

на множествах

$$T_1=\left\{\psi:\psi\in C^1(\bar{D}),\psi=0,(x,y)\in\partial D_{\gamma_0}^+\right\},\quad T_2=\left\{u:u\in C^1(\bar{D}),u(x,0)=0,u(x,H)=0\right\}.$$

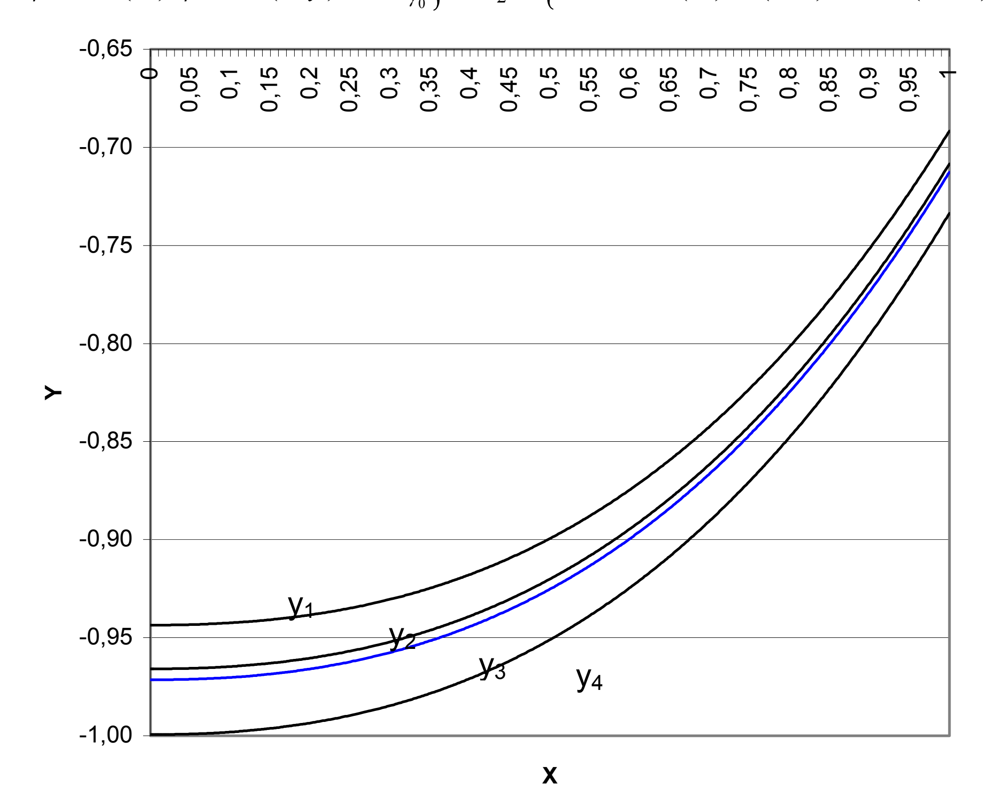


Рисунок 1 – Линии кристаллизации

Проблема минимума эффективно решается при помощи метода Ритца. При этом приближения Ритца ψ_n и u_n строятся следующим образом:

$$\psi_n=y(y-H)(y-y_0(x))(x-1)\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{m_k}c_{kj}x^{2j}y^k,$$

$$u_n=y(y-H)\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{m_k}a_{kj}x^{2j}y^k, n=\sup_{0\le k\le m}(m+2m_k),$$

где $y_0(x)$ – решение уравнения $u_0(x, y) - 1 = 0$, $(x, y) \in D$ в классе функций $u_{0y}(x, y) >$ > 0 в D. Сходимость приближенных решений к точным решениям, соответствующих краевых задач, изучена в [5]. Неизвестные коэффициенты a_{kj} и c_{kj} определяются из условий минимума функций $\mathrm{I}_1(\psi_n) = \widetilde{\mathrm{I}}_1(c_{kj})$, $\mathrm{I}_2(u_n) = \widetilde{\mathrm{I}}_2(a_{kj})$.

Численный эксперимент осуществлялся при определенных значениях теплофизических значений параметров. На рис. 1 изображен график линий кристаллизации $y(x,\mu)$ при различных значениях μ, соответственно при $\mu = -0,5;\ 0;\ 0,1;\ 0,5$. Кривые $y(x,\mu)$ строились в виде многочленов

$$y(x,\mu) = \alpha_3(\mu)x^3 + \alpha_2(\mu)x^2 + \alpha_1(\mu)x + \alpha_0(\mu).$$

Вычисления производились при $H = -10, v = 1,25, \omega_0 = 3,5$, при этом $y_1 = y(x,0,5)$; $y_2 = y(x,0,1)$; $y_4 = y(x,-0,5)$ и $y_3 = y_0(x)$.

Проделанный численный эксперимент подтверждает влияние конвективного теплообмена на процесс кристаллизации. Эксперимент сохранит свой смысл, если параметры ω_0^+ и ω_0^- брать в некоторой малой окрестности чисел $\omega_0 = 3,5$, а $k = 1$.

Литература

1. Патон Б.Е. Избранные труды / Патон Б.Е. – Киев : ТР. ИЭС им. Е.О. Патона НАН Украины, 2008. – 893 с.
2. Миненко А.С. Вариационные задачи со свободной границей / Миненко А.С. – Киев : Наукова думка, 2005. – 341 с.
3. Миненко А.С. Исследование одной конвективной задачи Стефана методом Ритца / А.С. Миненко // Укр. мат. журнал. – 2007. – 59, № 11. – С. 1546-1556.
4. Миненко А.С. О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца / А.С. Миненко // Укр. мат. журнал. – 2006. – 58, № 10. – С. 1385-1394.
5. Харик И.Ю. О проблеме аппроксимации функций, связанной с исследованием сходимости вариационных процессов / И.Ю. Харик // Докл. АН СССР. – 1951. – 81, № 2. – С. 157-160.

О.С. Міненко

Дослідження стаціонарної конвективної математичної моделі кристалізації речовини

Досліджується стаціонарна задача Стефана з урахуванням конвективних рухів у рідинній фазі на площині. Доведено рівняння вільної границі в залежності від інтенсивності вихору. Побудовано наближене рішення задачі.

A.S. Minenko

Research of Stationary Mathematical Model of Crystallization of Substance with Convection

Two-dimensional stationary convection Stefan problem in liquid phase is investigated. Formula of free boundary equation is obtained. The approximation solution is build.

Статья поступила в редакцию 25.01.2010.